von Neumann 環の超積について

安藤浩志

IHÉS

日本数学会年会, 2013.3.22

Uffe Haagerup 氏 (University of Copenhagen) との共同研究

概要

1. 超積の歴史-3 つの超積、3 つの中心列-
2. 主定理 1: 超積相互の関係
3. 主定理 2: 超積と富田・竹崎理論
4. 応用 1: 超積 M^ω のタイプと因子性
5. 応用 2: 植田問題

トレース超積の復習

以下自由超フィルター $\omega \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ **を固定する。**

定義 (Wright'54-境'62)

(M, τ) *II*$_1$ *factor* **に対し、トレース超積** (M^ω, τ^ω) **を以下で定める**;

$$\begin{aligned} \ell^\infty(\mathbb{N}, M) &:= \{(x_n)_n \in \prod_{\mathbb{N}} M; \sup_n ||x_n|| < \infty\}, \\ \mathcal{I}_\omega(\mathbb{N}, M) &:= \{(x_n)_n \in \ell^\infty(\mathbb{N}, M); \lim_{n\to\omega} ||x_n||_2 = 0\} \\ M^\omega &:= \ell^\infty(\mathbb{N}, M)/\mathcal{I}_\omega(\mathbb{N}, M), \\ \tau^\omega((x_n)^\omega) &:= \lim_{n\to\omega} \tau(x_n), \quad (x_n)^\omega \in M^\omega. \end{aligned}$$

定義

$M \ni x \mapsto (x, x \cdots)^\omega \in M^\omega$ **で** $M \subset M^\omega$ **とみなす。このとき** $M_\omega := M' \cap M^\omega$ **を** M **の中心列環と呼ぶ。**

M が有限型でないときは $\mathcal{I}_\omega(\mathbb{N}, M) \not\triangleright \ell^\infty(\mathbb{N}, M)$。

$$\mathcal{I}_\omega(\mathbb{N}, M) = \{(x_n)_n \in \ell^\infty(\mathbb{N}, M); \text{s*ot-}\lim_{n\to\omega} x_n = 0\}$$

M_ω や M^ω をどう定義するか?
複数の同値でない定義が提唱されてきた。

3 つの超積環、3 つの中心列環

- Connes ('74) **漸近中心化環** M_ω
- Golodets ('75) **超積環** $\mathscr{R}_M^\omega$ (implicit **に導入**)　**漸近環** C_M^ω
- Ocneanu ('85) **中心列環・超積環**　$M' \cap M^\omega \subset M^\omega$
- Groh('85)-Raynaud('02) **超積環** $\prod^\omega M$

3 つの超積環、3 つの中心列環

- Connes ('74) **漸近中心化環** M_ω
- Golodets ('75) **超積環** $\mathscr{R}^\omega_M$ (implicit **に導入**) **漸近環** C^ω_M
- Ocneanu ('85) **中心列環・超積環** $M' \cap M^\omega \subset M^\omega$
- Groh('85)-Raynaud('02) **超積環** $\prod^\omega M$

これらの間には著しい類似点と相違点がある:

3 つの超積環、3 つの中心列環

- Connes ('74) **漸近中心化環** M_ω
- Golodets ('75) **超積環** $\mathscr{R}_M^\omega$ (implicit **に導入**) **漸近環** C_M^ω
- Ocneanu ('85) **中心列環・超積環** $M' \cap M^\omega \subset M^\omega$
- Groh('85)-Raynaud('02) **超積環** $\prod^\omega M$

これらの間には著しい類似点と相違点がある:

- M_ω **は常に有限型。**
- C_M^ω **と** $M' \cap M^\omega$ **は III 型にもなりえる。**
- $\prod^{\mathcal{U}} \mathbb{B}(H)$ **は半有限でない。** (Raynaud)
- $\mathbb{B}(\ell^2)^\omega = \mathbb{B}(\ell^2)$ (?)
- $L^p(M)_\omega = L^p(\prod^\omega M)$ $(1 \le p < \infty)$ (Raynaud)
- $\prod^\omega R$ **は半有限でも因子環でもない** (A-Haagerup)

定義 (Connes'74)

漸近中心化環 M_ω を以下で定義する。

$$\mathcal{M}_\omega := \{(x_n)_n \in \ell^\infty(M);\ \lim_{n\to\omega} ||x_n\varphi - \varphi x_n||_{M_*} = 0,\ \ \forall\varphi \in M_*\}$$

$$\mathcal{I}_\omega := \{(x_n)_n \in \ell^\infty(M);\ so^*\text{-}\lim_{n\to\omega} x_n = 0\},$$

$$M_\omega := \mathcal{M}_\omega/\mathcal{I}_\omega$$

$(x_n)_n \in \mathcal{M}_\omega$ は **強 ω-中心列**と呼ばれる。

M 無限型 $\Rightarrow \mathcal{I}_\omega(\mathbb{N}, M) \not\triangleright \ell^\infty(\mathbb{N}, M)$.

定義 (Ocneanu('85))

$M^\omega := \mathcal{M}^\omega / \mathcal{I}_\omega$,

$$\mathcal{M}^\omega = \{x \in \ell^\infty(\mathbb{N}, M); x\mathcal{I}_\omega \subset \mathcal{I}_\omega,\ \mathcal{I}_\omega x \subset \mathcal{I}_\omega\}$$

M^ω を *Ocneanu* **超積**と呼ぶ。M^ω は W^*-環。

- 任意の M の忠実正則状態 φ は M^ω の忠実正則状態 φ^ω を定める：$\varphi^\omega((x_n)^\omega) = \lim_\omega \varphi(x_n)$.

M 無限型 $\Rightarrow \mathcal{I}_\omega(\mathbb{N}, M) \not\triangleright \ell^\infty(\mathbb{N}, M)$.

定義 (Ocneanu('85))

$M^\omega := \mathcal{M}^\omega / \mathcal{I}_\omega$,

$$\mathcal{M}^\omega = \{x \in \ell^\infty(\mathbb{N}, M); x\mathcal{I}_\omega \subset \mathcal{I}_\omega,\ \mathcal{I}_\omega x \subset \mathcal{I}_\omega\}$$

M^ω を *Ocneanu* **超積**と呼ぶ。M^ω は W^*-環。

- 任意の M の忠実正則状態 φ は M^ω の忠実正則状態 φ^ω を定める：$\varphi^\omega((x_n)^\omega) = \lim_\omega \varphi(x_n)$.
- $M \subset M^\omega$ で、$M' \cap M^\omega$ を (Ocneanu の) **中心列環**と言う。.

M 無限型 $\Rightarrow \mathcal{I}_\omega(\mathbb{N}, M) \not\triangleright \ell^\infty(\mathbb{N}, M)$.

定義 (Ocneanu('85))

$M^\omega := \mathcal{M}^\omega / \mathcal{I}_\omega$,

$$\mathcal{M}^\omega = \{x \in \ell^\infty(\mathbb{N}, M); x\mathcal{I}_\omega \subset \mathcal{I}_\omega,\ \mathcal{I}_\omega x \subset \mathcal{I}_\omega\}$$

M^ω を *Ocneanu* **超積**と呼ぶ。M^ω は W^*-環。

- 任意の M の忠実正則状態 φ は M^ω の忠実正則状態 φ^ω を定める：$\varphi^\omega((x_n)^\omega) = \lim_\omega \varphi(x_n)$.
- $M \subset M^\omega$ で、$M' \cap M^\omega$ を (Ocneanu の) **中心列環**と言う。.
- $M_\omega \subset M' \cap M^\omega$ で、III 型環では両者は一般に一致しない。

M : σ-有限, φ n.f. 状態. 正則でない状態 $\overline{\varphi}$: $\ell^\infty(\mathbb{N}, M) \to \mathbb{C}$ を以下で定義：

$$\overline{\varphi}((x_n)_n) := \lim_{n\to\omega} \varphi(x_n), \quad (x_n)_n \in \ell^\infty(\mathbb{N}, M).$$

$\rightsquigarrow$ $(\pi_{\mathrm{G}}, H_{\mathrm{G}}, \overline{\xi})$ $\overline{\varphi}$ の GNS 表現をとる。

M : σ-有限, φ n.f. 状態. 正則でない状態 $\overline{\varphi} : \ell^\infty(\mathbb{N}, M) \to \mathbb{C}$ を以下で定義：

$$\overline{\varphi}((x_n)_n) := \lim_{n\to\omega} \varphi(x_n), \quad (x_n)_n \in \ell^\infty(\mathbb{N}, M).$$

$\rightsquigarrow$ $(\pi_{\mathrm{G}}, H_{\mathrm{G}}, \overline{\xi})$ $\overline{\varphi}$ の GNS 表現をとる。
$e_\omega := H_{\mathrm{G}}$ の $K_G := \overline{\pi_{\mathrm{G}}(\ell^\infty(\mathbb{N}, M))'\overline{\xi}}$ への射影。
Golodets 超積 $\mathscr{R}_{M,\varphi}^\omega := e_\omega \pi_{\mathrm{G}}(\ell^\infty(\mathbb{N}, M))'' e_\omega$.

M : σ-有限, φ n.f. 状態. 正則でない状態 $\overline{\varphi}: \ell^\infty(\mathbb{N}, M) \to \mathbb{C}$ を以下で定義：

$$\overline{\varphi}((x_n)_n) := \lim_{n\to\omega} \varphi(x_n), \quad (x_n)_n \in \ell^\infty(\mathbb{N}, M).$$

$\rightsquigarrow (\pi_{\mathrm{G}}, H_{\mathrm{G}}, \overline{\xi})$ $\overline{\varphi}$ の GNS 表現をとる。
$e_\omega := H_{\mathrm{G}}$ の $K_G := \overline{\pi_{\mathrm{G}}(\ell^\infty(\mathbb{N}, M))'\overline{\xi}}$ への射影。
Golodets 超積 $\mathscr{R}_{M,\varphi}^\omega := e_\omega \pi_{\mathrm{G}}(\ell^\infty(\mathbb{N}, M))'' e_\omega$.

定義 (Golodets('75))

M の *Golodets* の**漸近環**を以下で定義する：

$$C_{M,\varphi}^\omega := \mathscr{R}_{M,\varphi}^\omega \cap \pi_{\mathrm{G}}(M)' \subset \mathbb{B}(K_G).$$

Golodets' C_M^ω

$$e_\omega\ H_{\mathrm{G}} \to K_{\mathrm{G}} := \overline{\pi_{\mathrm{G}}(\ell^\infty(\mathbb{N}, M))'\xi}$$

$$\mathscr{R}_{M,\varphi}^\omega := e_\omega \pi_{\mathrm{G}}(\ell^\infty(\mathbb{N}, M))'' e_\omega$$
$$C_{M,\varphi}^\omega := \mathscr{R}_{M,\varphi}^\omega \cap \pi_{\mathrm{G}}(M)' \subset \mathbb{B}(K_{\mathrm{G}}).$$

$$e_\omega\ H_{\mathrm{G}} \to K_{\mathrm{G}} := \overline{\pi_{\mathrm{G}}(\ell^\infty(\mathbb{N}, M))'\xi}$$

$$\mathscr{R}_{M,\varphi}^\omega := e_\omega \pi_{\mathrm{G}}(\ell^\infty(\mathbb{N}, M))'' e_\omega$$
$$C_{M,\varphi}^\omega := \mathscr{R}_{M,\varphi}^\omega \cap \pi_{\mathrm{G}}(M)' \subset \mathbb{B}(K_{\mathrm{G}}).$$

定理 (Golodets('75))

M を可分因子環、$0 < \lambda < 1$ とする。

(1) $C_{M,\varphi}^\omega \cong C_{M,\psi}^\omega$ for $\forall \varphi, \psi$ なので、以下 C_M^ω と書く。

(2) $M \overline{\otimes} R_\lambda \cong M \Leftrightarrow \lambda$ が $\Delta_{\dot{\varphi}}$ の固有値。ここで $\dot{\varphi} := \omega_{\overline{\xi}}|_{C_M^\omega}$ を *Golodets* **状態**と呼ぶ。

(3) M が *McDuff* $\Leftrightarrow (C_M^\omega)_{\dot{\varphi}}$ が非可環。

$\mathscr{R}$ と C_M^ω は何者か?

Ocneanu M^{ω} は

- 自己同型群の研究に有効。
- 非可換 L^p 空間論と相性が良くない：$L^p(M)_{\omega} \neq L^p(M^{\omega})$.

Groh-Raynaud $\prod^{\omega} M$

Ocneanu M^{ω} は

- 自己同型群の研究に有効。
- 非可換 L^p 空間論と相性が良くない：$L^p(M)_{\omega} \neq L^p(M^{\omega})$.

M: vNa, M_* predual
Groh ('85): $(M_*)_{\omega} \cong (\prod^{\omega} M)_*$ for $\exists ! \prod^{\omega} M$.

Groh-Raynaud $\prod^{\omega} M$

Ocneanu M^{ω} **は**

- **自己同型群の研究に有効。**
- **非可換** L^p **空間論と相性が良くない：** $L^p(M)_{\omega} \neq L^p(M^{\omega})$.

M: vNa, M_* predual
Groh ('85): $(M_*)_{\omega} \cong (\prod^{\omega} M)_*$ for $\exists ! \prod^{\omega} M$.
Raynaud('02) **はより分かりやすい** $\prod^{\omega} M$ **の構成法を与えた**

Ocneanu M^ω は

- **自己同型群の研究に有効。**
- **非可換 L^p 空間論と相性が良くない：**$L^p(M)_\omega \neq L^p(M^\omega)$.

M: vNa, M_* predual
Groh ('85): $(M_*)_\omega \cong (\prod^\omega M)_*$ for $\exists ! \prod^\omega M$.
Raynaud('02) **はより分かりやすい** $\prod^\omega M$ **の構成法を与えた**
標準形の列 $(M_n, H_n, J_n, P_n)_n$ **をとり、**$H_\omega := (H_n)_\omega$ **とする。*-表現** $\pi_\omega : (M_n)_\omega \to \mathbb{B}(H_\omega)$ **を**

$$\pi_\omega((x_n)_\omega)(\xi_n)_\omega := (x_n\xi_n)_\omega, \quad (x_n)_\omega \in (M)_\omega, (\xi_n)_\omega \in H_\omega.$$

で定義する。

Ocneanu M^{ω} は

- 自己同型群の研究に有効。
- 非可換 L^p 空間論と相性が良くない：$L^p(M)_{\omega} \neq L^p(M^{\omega})$.

M: vNa, M_* predual
Groh ('85): $(M_*)_{\omega} \cong (\prod^{\omega} M)_*$ for $\exists! \prod^{\omega} M$.
Raynaud('02) はより分かりやすい $\prod^{\omega} M$ の構成法を与えた
標準形の列 $(M_n, H_n, J_n, P_n)_n$ をとり、$H_{\omega} := (H_n)_{\omega}$ とする。*-表現 $\pi_{\omega} : (M_n)_{\omega} \to \mathbb{B}(H_{\omega})$ を

$$\pi_{\omega}((x_n)_{\omega})(\xi_n)_{\omega} := (x_n \xi_n)_{\omega}, \quad (x_n)_{\omega} \in (M)_{\omega}, (\xi_n)_{\omega} \in H_{\omega}.$$

で定義する。

定義 (Raynaud'02)

$\prod^{\omega} M_n := \pi_{\omega}((M_n)_{\omega})''$ を *Groh-Raynaud* **超積**と呼ぶ。

$\prod^\omega M_n := \pi_\omega((M_n)_\omega)'' \subset \mathbb{B}(H_\omega)$.

定理 (Raynaud'02)

以下が成り立つ。

(1) $(\prod^\omega M)' = \prod^\omega M'$.

(2) $L^p(M)_\omega = L^p(\prod^\omega M)$ $(1 \leq p < \infty)$. **特に** $(M_*)_\omega = (\prod^\omega M)_*$.

(3) $\prod^{\mathcal{U}} \mathbb{B}(\ell^2)$ **は半有限でない。** *(cf.* $\mathbb{B}(\ell^2)^\omega = \mathbb{B}(\ell^2)$*)*

$\prod^\omega M_n := \pi_\omega((M_n)_\omega)'' \subset \mathbb{B}(H_\omega)$.

定理 (Raynaud'02)

以下が成り立つ。

(1) $(\prod^\omega M)' = \prod^\omega M'$.

(2) $L^p(M)_\omega = L^p(\prod^\omega M)$ $(1 \leq p < \infty)$. 特に $(M_*)_\omega = (\prod^\omega M)_*$.

(3) $\prod^{\mathcal{U}} \mathbb{B}(\ell^2)$ は半有限でない。(*cf.* $\mathbb{B}(\ell^2)^\omega = \mathbb{B}(\ell^2)$)

$\boxed{\text{要約}}$ 3 つの超積環と 3 つの中心列環が存在する。

- 3 UPs $\mathscr{R}_M^\omega, M^\omega, \prod^\omega M$
- 3 CSs $C_M^\omega, M_\omega, M' \cap M^\omega$

3 **つの** UP,CS **を関連付けるために、**Ocneanu **の構成を少し一般化しておく。**(M_n, φ_n) vN **環**/n.f. **状態の列に対し、以下を定義：**

$$\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N}, M_n) := \{(x_n)_n \in \prod_n M_n; \sup_n ||x_n|| < \infty\},$$

$$\mathcal{I}_\omega = \mathcal{I}_\omega(\mathbb{N}, M_n, \varphi_n) := \{(x_n)_n \in \ell^\infty;\ ||x_n||^\sharp_{\varphi_n} \xrightarrow{\omega} 0\},$$

$$\mathcal{M}^\omega = \mathcal{M}^\omega(\mathbb{N}, M_n, \varphi_n) := \{x \in \ell^\infty;\ x\mathcal{I}_\omega \subset \mathcal{I}_\omega,\ \mathcal{I}_\omega x \subset \mathcal{I}_\omega\}$$

$$||x||^\sharp_\varphi := \varphi(x^*x + xx^*)^{\frac{1}{2}},\ ||x||_\varphi := \varphi(x^*x)^{\frac{1}{2}}.$$

超積相互の関係

3 **つの** UP,CS **を関連付けるために、**Ocneanu **の構成を少し一般化しておく。**(M_n, φ_n) vN **環**/n.f. **状態の列に対し、以下を定義：**

$$\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N}, M_n) := \{(x_n)_n \in \prod_n M_n; \sup_n ||x_n|| < \infty\},$$

$$\mathcal{I}_\omega = \mathcal{I}_\omega(\mathbb{N}, M_n, \varphi_n) := \{(x_n)_n \in \ell^\infty;\ ||x_n||_{\varphi_n}^\sharp \xrightarrow{\omega} 0\},$$

$$\mathcal{M}^\omega = \mathcal{M}^\omega(\mathbb{N}, M_n, \varphi_n) := \{x \in \ell^\infty;\ x\mathcal{I}_\omega \subset \mathcal{I}_\omega,\ \mathcal{I}_\omega x \subset \mathcal{I}_\omega\}$$

$$||x||_\varphi^\sharp := \varphi(x^*x + xx^*)^{\frac{1}{2}},\ ||x||_\varphi := \varphi(x^*x)^{\frac{1}{2}}.$$

命題 (Ocneanu Ultraproduct)

$(M_n, \varphi_n)^\omega$ **は** *n.f.* **状態** $(\varphi_n)^\omega$ **を持つ** W^***-環である。ここで**

$$(M_n, \varphi_n)^\omega := \mathcal{M}^\omega(\mathbb{N}, M_n, \varphi_n)/\mathcal{I}_\omega(\mathbb{N}, M_n, \varphi_n).$$

$$(\varphi_n)^\omega((x_n)^\omega) := \lim_{n\to\omega} \varphi_n(x_n),\quad x = (x_n)^\omega \in (M_n, \varphi_n)^\omega.$$

超積相互の関係

$M^\omega := (M_n, \varphi_n)^\omega, \varphi^\omega := (\varphi_n)^\omega$ と略記する。
(M_n, φ_n) に対して、
$H_n = L^2(M_n, \varphi_n),\ H_\omega = (H_n)_\omega, J_\omega = (J_{\varphi_n})_\omega$ とする。

$M^\omega := (M_n, \varphi_n)^\omega, \varphi^\omega := (\varphi_n)^\omega$ と略記する。
(M_n, φ_n) に対して、
$H_n = L^2(M_n, \varphi_n),\ H_\omega = (H_n)_\omega, J_\omega = (J_{\varphi_n})_\omega$ とする。
等距離作用素 $w : L^2(M^\omega, \varphi^\omega) \ni (x_n)^\omega \xi_{\varphi^\omega} \mapsto (x_n \xi_{\varphi_n})_\omega \in H_\omega$ を考える。

超積相互の関係

$M^\omega := (M_n, \varphi_n)^\omega, \varphi^\omega := (\varphi_n)^\omega$ と略記する。
(M_n, φ_n) に対して、
$H_n = L^2(M_n, \varphi_n),\ H_\omega = (H_n)_\omega, J_\omega = (J_{\varphi_n})_\omega$ とする。
等距離作用素 $w : L^2(M^\omega, \varphi^\omega) \ni (x_n)^\omega \xi_{\varphi^\omega} \mapsto (x_n \xi_{\varphi_n})_\omega \in H_\omega$ を考える。
$\xi_\omega := (\xi_{\varphi_n})_\omega \in H_\omega, \varphi_\omega := \langle \cdot \xi_\omega, \xi_\omega \rangle \in (\prod^\omega M_n)_*$ の台を p とする。

超積相互の関係

$M^\omega := (M_n, \varphi_n)^\omega, \varphi^\omega := (\varphi_n)^\omega$ と略記する。
(M_n, φ_n) に対して、
$H_n = L^2(M_n, \varphi_n),\ H_\omega = (H_n)_\omega, J_\omega = (J_{\varphi_n})_\omega$ とする。
等距離作用素 $w : L^2(M^\omega, \varphi^\omega) \ni (x_n)^\omega \xi_{\varphi^\omega} \mapsto (x_n \xi_{\varphi_n})_\omega \in H_\omega$ を考える。
$\xi_\omega := (\xi_{\varphi_n})_\omega \in H_\omega, \varphi_\omega := \langle \cdot\, \xi_\omega, \xi_\omega \rangle \in (\prod^\omega M_n)_*$ の台を p とする。

定理 (A-Haagerup)

(1) $w^*(\prod^\omega M_n)w = M^\omega$ かつ $q := ww^* = pJ_\omega pJ_\omega$.

(2) $(x_n)_n \in \mathcal{M}^\omega \Leftrightarrow (x_n)_\omega p = p(x_n)_\omega$

(3) $\rho : M^\omega \ni (x_n)^\omega \mapsto p(x_n)_\omega \in p(\prod^\omega M_n)p$ は*-同型を与える。

超積相互の関係

$M^\omega := (M_n, \varphi_n)^\omega, \varphi^\omega := (\varphi_n)^\omega$ と略記する。
(M_n, φ_n) に対して、
$H_n = L^2(M_n, \varphi_n),\ H_\omega = (H_n)_\omega, J_\omega = (J_{\varphi_n})_\omega$ とする。
等距離作用素 $w : L^2(M^\omega, \varphi^\omega) \ni (x_n)^\omega \xi_{\varphi^\omega} \mapsto (x_n \xi_{\varphi_n})_\omega \in H_\omega$ を考える。
$\xi_\omega := (\xi_{\varphi_n})_\omega \in H_\omega, \varphi_\omega := \langle \cdot \xi_\omega, \xi_\omega \rangle \in (\prod^\omega M_n)_*$ の台を p とする。

定理 (A-Haagerup)

(1) $w^*(\prod^\omega M_n)w = M^\omega$ かつ $q := ww^* = pJ_\omega pJ_\omega$.
(2) $(x_n)_n \in \mathcal{M}^\omega \Leftrightarrow (x_n)_\omega p = p(x_n)_\omega$
(3) $\rho : M^\omega \ni (x_n)^\omega \mapsto p(x_n)_\omega \in p(\prod^\omega M_n)p$ は*-同型を与える。

特に M^ω は $\prod^\omega M_n$ の corner $p(\prod^\omega M_n)p$ と同一視できる。また $M^\omega \cong q(\prod^\omega M_n)q$ は標準形として同型であり、この対応で φ^ω は $\varphi_\omega = \langle \cdot \xi_\omega, \xi_\omega \rangle$ に移る。

$q := ww^* = pJ_\omega pJ_\omega$. $L^2(M^\omega, \varphi^\omega) \xrightarrow{w} qH_\omega$.
$M^\omega \cong p(\prod^\omega M)p$ **がわかった。実は** Golodets **は** Ocneanu **である事が分かる：**

Ocneanu$\cong$Golodets$=p$(Groh-Raynaud)p

$q := ww^* = pJ_\omega pJ_\omega$. $L^2(M^\omega, \varphi^\omega) \xrightarrow{w} qH_\omega$.
$M^\omega \cong p(\prod^\omega M)p$ がわかった。実は Golodets は Ocneanu である事が分かる：

定理 (A-Haagerup)

σ-有限 *vN* 環 M に対して、写像

$$\Theta : M^\omega \ni x \mapsto wxw^* \in q\left(\prod^\omega M\right)q = \mathscr{R}_M^\omega$$

は *-同型であり、この同型によって $\varphi^\omega \leftrightarrow \langle\,\cdot\,\bar{\xi}, \bar{\xi}\rangle$, $M' \cap M^\omega \leftrightarrow C_M^\omega$, $M_\omega \leftrightarrow (C_M)_{\dot{\varphi}}$ と対応する。

注意

Θ は標準形としての同型を与える。

モジュラー自己同型群の超積

定理 (Golodets,Raynaud,A-Haagerup)

以下が成り立つ:

$$(\sigma_t^{\varphi_n}(x_n))^\omega = \sigma_t^{\varphi^\omega}((x_n)^\omega), \quad (x_n)^\omega \in M^\omega.$$

特に $t \mapsto (\sigma_t^{\varphi_n})^\omega$ は連続。

定理 (Golodets,Raynaud,A-Haagerup)

以下が成り立つ:

$$(\sigma_t^{\varphi_n}(x_n))^\omega = \sigma_t^{\varphi^\omega}((x_n)^\omega), \quad (x_n)^\omega \in M^\omega.$$

特に $t \mapsto (\sigma_t^{\varphi_n})^\omega$ は連続。

対応 $L^2(M^\omega, \varphi^\omega) \overset{w}{\cong} qH_\omega$ によって φ^ω は $\varphi_\omega = \langle \cdot\, \xi_\omega, \xi_\omega \rangle$ に移るので、この同一視の下で富田の S-写像のグラフは

$$G(S_{\varphi^\omega}) = (G(S_{\varphi_n}))_\omega \cap qH_\omega \oplus_{\mathbb{R}} qH_\omega$$

となり、

定理 (Golodets,Raynaud,A-Haagerup)

以下が成り立つ:

$$(\sigma_t^{\varphi_n}(x_n))^\omega = \sigma_t^{\varphi^\omega}((x_n)^\omega), \quad (x_n)^\omega \in M^\omega.$$

特に $t \mapsto (\sigma_t^{\varphi_n})^\omega$ は連続。

対応 $L^2(M^\omega, \varphi^\omega) \overset{w}{\cong} qH_\omega$ によって φ^ω は $\varphi_\omega = \langle \cdot\, \xi_\omega, \xi_\omega \rangle$ に移るので、この同一視の下で富田の S-写像のグラフは

$$G(S_{\varphi^\omega}) = (G(S_{\varphi_n}))_\omega \cap qH_\omega \oplus_{\mathbb{R}} qH_\omega$$

となり、さらに閉作用素のグラフへの射影の公式から

$$P_{G(S_{\varphi_n})} = \begin{pmatrix} (1+\Delta_{\varphi_n})^{-1} & J_{\varphi_n}(\Delta_{\varphi_n}^{\frac{1}{2}} + \Delta_{\varphi_n}^{-\frac{1}{2}})^{-1} \\ J_{\varphi_n}(\Delta_{\varphi_n}^{\frac{1}{2}} + \Delta_{\varphi_n}^{-\frac{1}{2}})^{-1} & (1+\Delta_{\varphi_n})^{-1} \end{pmatrix}$$

モジュラー自己同型群の超積

よって $G(S_{\varphi^\omega}) = (G(S_{\varphi_n}))_\omega \cap qH_\omega \oplus_{\mathbb{R}} qH_\omega$ への射影の $(1,1)$ 成分を見て

$$(1+\Delta_{\varphi^\omega})^{-1} = ((1+\Delta_{\varphi_n})^{-1})_\omega|_{L^2(M^\omega,\varphi^\omega)}$$

が言える。ここから

$$\Delta_{\varphi^\omega}^{it} = (\Delta_{\varphi_n}^{it})_\omega|_{L^2(M^\omega,\varphi^\omega)}$$

が示せ、結論が言える。

よって $G(S_{\varphi^\omega}) = (G(S_{\varphi_n}))_\omega \cap qH_\omega \oplus_{\mathbb{R}} qH_\omega$ **への射影の** (1,1) **成分を見て**

$$(1+\Delta_{\varphi^\omega})^{-1} = ((1+\Delta_{\varphi_n})^{-1})_\omega|_{L^2(M^\omega,\varphi^\omega)}$$

が言える。ここから

$$\Delta_{\varphi^\omega}^{it} = (\Delta_{\varphi_n}^{it})_\omega|_{L^2(M^\omega,\varphi^\omega)}$$

が示せ、結論が言える。

系 (A-Haagerup)

$(x_n)_n \in \ell^\infty(\mathbb{N}, M_n)$ **に対して以下は同値**:

(1) $(x_n)_n \in \mathcal{M}^\omega$.

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists a > 0, \exists (y_n)_n \in \ell^\infty(\mathbb{N}, M_n)$ *s.t.*
(i) $y_n \in M_n(\sigma^{\varphi_n}, [-a, a])$ $(n \in \mathbb{N})$.
(ii) $\lim_\omega \|x_n - y_n\|_{\varphi_n}^\sharp < \varepsilon$.

超積 $(M, \varphi_n)^\omega$ の性質

σ-有限因子環 M とその n.f. **状態列 $(\varphi_n)_n$ に対して、$(M, \varphi_n)^\omega$ の $(\varphi_n)_n$ 依存性を考察する。**

超積 $(M, \varphi_n)^\omega$ の性質

σ-有限因子環 M とその n.f. **状態列 $(\varphi_n)_n$ に対して、$(M, \varphi_n)^\omega$ の $(\varphi_n)_n$ 依存性を考察する。**

定理 (A-Haagerup)

(1) M **が** III_λ $(\lambda \neq 0)$ **のとき、**$(M, \varphi_n)^\omega \cong M^\omega$ **は状態列によらず** III_λ **因子となる。**

超積 $(M, \varphi_n)^\omega$ の性質

σ-有限因子環 M とその n.f. 状態列 $(\varphi_n)_n$ に対して、$(M, \varphi_n)^\omega$ の $(\varphi_n)_n$ 依存性を考察する。

定理 (A-Haagerup)

(1) **M が III_λ $(\lambda \neq 0)$ のとき、$(M, \varphi_n)^\omega \cong M^\omega$ は状態列によらず III_λ 因子となる。**

(2) **M が III_0 のとき、ある $(\varphi_n)_n$ に対して $(M, \varphi_n)^\omega$ は有限型で、$(\varphi_n)^\omega$ は忠実トレースとなる。特に $\prod^\omega M$ は因子環でなく、半有限成分を持つ。**

超積 $(M, \varphi_n)^\omega$ の性質

σ-有限因子環 M とその n.f. 状態列 $(\varphi_n)_n$ に対して、$(M, \varphi_n)^\omega$ の $(\varphi_n)_n$ 依存性を考察する。

定理 (A-Haagerup)

(1) M が III_λ $(\lambda \neq 0)$ のとき、$(M, \varphi_n)^\omega \cong M^\omega$ は状態列によらず III_λ 因子となる。

(2) M が III_0 のとき、ある $(\varphi_n)_n$ に対して $(M, \varphi_n)^\omega$ は有限型で、$(\varphi_n)^\omega$ は忠実トレースとなる。特に $\prod^\omega M$ は因子環でなく、半有限成分を持つ。

(3) $M = R$ が *AFD* II_1 因子環のとき、ある $(\varphi_n)_n$ に対して $(R, \varphi_n)^\omega$ は半有限でない。特に $\prod^\omega R$ は半有限でも因子環でもない。

超積 $(M,\varphi_n)^\omega$ の性質

σ-有限因子環 M とその n.f. 状態列 $(\varphi_n)_n$ に対して、$(M,\varphi_n)^\omega$ の $(\varphi_n)_n$ 依存性を考察する。

定理 (A-Haagerup)

(1) M が III_λ $(\lambda \neq 0)$ のとき、$(M,\varphi_n)^\omega \cong M^\omega$ は状態列によらず III_λ 因子となる。

(2) M が III_0 のとき、ある $(\varphi_n)_n$ に対して $(M,\varphi_n)^\omega$ は有限型で、$(\varphi_n)^\omega$ は忠実トレースとなる。特に $\prod^\omega M$ は因子環でなく、半有限成分を持つ。

(3) $M = R$ が *AFD* II_1 因子環のとき、ある $(\varphi_n)_n$ に対して $(R,\varphi_n)^\omega$ は半有限でない。特に $\prod^\omega R$ は半有限でも因子環でもない。

定理 (A-Haagerup)

$\prod^\omega M_n$ の状態空間の直径 $d(\prod^\omega M_n)$ は $\lim_{n\to\omega} d(M_n)$ に等しい。特に M が III_λ $(\lambda \neq 0)$ 型因子環ならば $\prod^\omega M$ も III_λ 型因子環。

定理 (A-Haagerup)

M を σ-有限 III_1 型因子環とすると、任意の M^ω の 2つの *n.f.* 状態 φ, ψ に対してユニタリ $u \in M^\omega$ 存在し、$u\varphi u^* = \psi$ となる。このような性質を持つ $\mathbb{C}$ でない *von Neumann* 環 M は必然的に非可分な III_1 型因子環であり、M 上の任意の *n.f.* 状態 φ の中心化環 M_φ は II_1 型因子環となる。

定理 (A-Haagerup)

M を σ-有限 III_1 型因子環とすると、任意の M^ω の 2 つの *n.f.* 状態 φ, ψ に対してユニタリ $u \in M^\omega$ 存在し、$u\varphi u^* = \psi$ となる。このような性質を持つ $\mathbb{C}$ でない *von Neumann* 環 M は必然的に非可分な III_1 型因子環であり、M 上の任意の *n.f.* 状態 φ の中心化環 M_φ は II_1 型因子環となる。

植田問題 $M_\omega = \mathbb{C} \stackrel{?}{\Rightarrow} M' \cap M^\omega = \mathbb{C}$

一般に $M_\omega \subsetneq M' \cap M^\omega$ である (e.g. $(R_\lambda)_\omega$ は II_1 型因子環だが (河東-Sutherland-竹崎)、$R_\lambda' \cap R_\lambda^\omega$ は III_λ 型因子環)。

植田問題 $M_\omega = \mathbb{C} \overset{?}{\Rightarrow} M' \cap M^\omega = \mathbb{C}$

一般に $M_\omega \subsetneq M' \cap M^\omega$ **である** (e.g. $(R_\lambda)_\omega$ **は** II_1 **型因子環だが (河東**-Sutherland-**竹崎)、**$R'_\lambda \cap R^\omega_\lambda$ **は** III_λ **型因子環)。**
これに関連した植田氏による以下の問がある：

問 (植田)

$M_\omega = \mathbb{C}$ **ならば** $M' \cap M^\omega = \mathbb{C}$ **か?**

植田問題 $M_\omega = \mathbb{C} \overset{?}{\Rightarrow} M' \cap M^\omega = \mathbb{C}$

一般に $M_\omega \subsetneq M' \cap M^\omega$ である (e.g. $(R_\lambda)_\omega$ は II_1 型因子環だが (河東-Sutherland-竹崎)、$R'_\lambda \cap R^\omega_\lambda$ は III_λ 型因子環)。

これに関連した植田氏による以下の問がある：

問 (植田)

$M_\omega = \mathbb{C}$ ならば $M' \cap M^\omega = \mathbb{C}$ か?

定理 (A-Haagerup)

M_* が可分ならば $M_\omega = \mathbb{C} \Rightarrow M' \cap M^\omega = \mathbb{C}$ が成り立つ。

一般に $M_\omega \subsetneq M' \cap M^\omega$ **である** (e.g. $(R_\lambda)_\omega$ **は** II_1 **型因子環だが** (**河東**-Sutherland-**竹崎**)、$R_\lambda' \cap R_\lambda^\omega$ **は** III_λ **型因子環**)。

これに関連した植田氏による以下の問がある：

問 (植田)

$M_\omega = \mathbb{C}$ **ならば** $M' \cap M^\omega = \mathbb{C}$ **か**?

定理 (A-Haagerup)

M_* **が可分ならば** $M_\omega = \mathbb{C} \Rightarrow M' \cap M^\omega = \mathbb{C}$ **が成り立つ。**

注意

Golodets **状態** $\dot{\varphi} := \varphi^\omega|_{M' \cap M^\omega}$ **を調べることで、**σ-**有限** III_0 **型因子環では常に** $M_\omega = M' \cap M^\omega \neq \mathbb{C}$ **である事を示せる。**