# 有限型 Polish 群について

安藤　浩志

京都大学理学研究科 数理解析研究所

日本数学会年会 2012.3.28

Joint work with
松澤泰道 (北海道大学)

**問題**: Polish 群 $G$ の中で、ある種の埋め込み条件を満たすものを特徴付け、具体例を構成する事。

$$G \overset{?}{\hookrightarrow} \mathcal{U}(M), \qquad M: \text{有限型 von Neumann 環}$$

## コンテンツ

1. 動機 · · · 何の為に埋め込みを考えるのか?
2. 有限型 Polish 群と Popa の埋め込み問題
3. 両側不変距離と群上の正定値関数
4. 有限型 Polish 群の例、遺伝的性質
5. Popa の埋め込み問題は解けるか?

# 1．動機．

$\mathcal{U}(\ell^2)$ の “Lie 環” $\mathfrak{U}(\ell^2) := \{A;\ A^* = -A\}$ には加法も Lie 括弧も定義できない (定義域の問題)。

$$u(t) \overset{\text{Stone}}{=} e^{tA},\quad \exists A^* = -A \quad \text{on } \ell^2$$

exp: $\mathfrak{u}(\ell^2) \ni A \mapsto e^A \in \mathcal{U}(\ell^2)$ を考察するには $\mathfrak{u}(\ell^2)$ に強レゾルベント収束位相 (SRT) が最適。
しかし SRT は線形位相ではない (位相の問題)。
$\mathcal{U}(\ell^2)$ は Lie 環を定義するには大きすぎる。どのような部分群 $G \subset \mathcal{U}(\ell^2)$ が Lie 環を持つか?

1 昨年、$\mathcal{U}(\ell^2)$ の部分群 $G$ で、位相 Lie 環を持つ物を発見した:

**Theorem (A-M('09))**

$G$ を有限型 *von Neumann* 環 $M$ のユニタリ群 $\mathcal{U}(M)$ の強閉部分群とする。このとき、$G$ の *1* 係数部分群の生成子全体

$$\mathfrak{g} = \{A^* = -A;\ e^{tA} \in G, \quad \forall t \in \mathbb{R}\}$$

は強レゾルベント収束位相 *(SRT)* によって完備位相 *Lie* 環となる。特に $\mathfrak{g}$ 上 *SRT* は線形位相となる。

どんな $G$ が適当な $\mathcal{U}(M)$ に埋めるのか?
局所コンパクトでない非自明な $G$ はあるのか?

偶然同じ問題は Sorin Popa 氏によって全く別の興味から考察を開始されていた。

## 主題

Sorin Popa (“Cocycle and orbit equivalence superrigidity for malleable actions of $w$-rigid groups”, Invent. Math. **170** (2007)) によって提示された以下の問題を考える:

**Problem**

*Polish* 群 $G$ であって、ある種のユニタリ群 $\mathcal{U}(M)$ への埋め込みが可能なものを特徴付ける事。また、そのような群の具体例を構成する事。

$$G \overset{?}{\hookrightarrow} \mathcal{U}(M), \quad M: \text{有限型}$$

Polish 群 $\cdots$ 可分、完備距離付け可能な位相群

## コンテンツ

1. 動機・・・何の為に埋め込みを考えるのか?
2. 有限型 Polish 群と Popa の埋め込み問題
3. 両側不変距離と群上の正定値関数
4. 有限型 Polish 群の例、遺伝的性質
5. Popa の埋め込み問題は解けるか?

# 2. 有限型 Polish 群と Popa の埋め込み問題

**Problem**

*Polish* 群 $G$ であって、ある種のユニタリ群 $\mathcal{U}(M)$ への埋め込みが可能なものを特徴付ける事。また、そのような群の具体例を構成する事。

$$G \overset{?}{\hookrightarrow} \mathcal{U}(M), \qquad M : \text{有限型 } \textit{von Neumann} \text{ 環}$$

Polish 群 $\cdots$ 可分、完備距離付け可能な位相群
$\mathcal{U}(M)$ は強位相で Polish 群である。自己同型群 $\mathrm{Aut}(M)$ も Polish。

## Problem

*Polish* 群 $G$ であって、ある種のユニタリ群 $\mathcal{U}(M)$ への埋め込みが可能なものを特徴付ける事。また、そのような群の具体例を構成する事。

$$G \overset{?}{\hookrightarrow} \mathcal{U}(M), \quad M: \text{ 有限型 } \textit{von Neumann} \text{ 環}$$

Polish 群 $\cdots$ 可分、完備距離付け可能な位相群

$\mathcal{U}(M)$ は強位相で Polish 群である。自己同型群 $\mathrm{Aut}(M)$ も Polish。

## Definition (Popa)

Polish 群 $G$ が有限型 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $G \overset{\exists}{\hookrightarrow} \mathcal{U}(M)$, $M$ 有限型 von Neumann 環

# 2. 有限型 Polish 群と Popa の埋め込み問題

**Lemma (Popa, Haagerup-Winsløw)**

有限型 *von Neumann* 環 $(M,\tau)$ はある $II_1$ 型因子環 $(\widetilde{M},\tilde{\tau})$ に $\tilde{\tau}|_M = \tau$ として埋め込める。
とくに $G$ が有限型 $\Leftrightarrow G \hookrightarrow \mathcal{U}(M)$, $\exists M$ $II_1$ 型因子環

埋め込みの必要十分条件は何か?
"明らかな"2 つの条件がある: SIN+UR。これらは独立な条件。

## コンテンツ

1. 動機 · · · 何の為に埋め込みを考えるのか?
2. 有限型 Polish 群と Popa の埋め込み問題
3. 両側不変距離と群上の正定値関数
4. 有限型 Polish 群の例、遺伝的性質
5. Popa の埋め込み問題は解けるか?

## “明らかな”必要条件: SIN

$G \hookrightarrow \mathcal{U}(M)$, $(M,\tau)$ II$_1$ 因子とする。$G$ には両側不変距離 $d$ が定まる:

$$d(u,v) := ||u-v||_2, \quad u,v \in G.$$

ここで $||x||_2 := \tau(x^*x)^{\frac{1}{2}}, \quad x \in M$。

$$\begin{aligned} d(uv_1w, uv_2w) &= \tau(w^*(v_1-v_2)^*\underbrace{u^*u}_{=1}(v_1-v_2)w)^{\frac{1}{2}} \\ &\overset{\text{トレース}}{=} \tau((v_1-v_2)^*(v_1-v_2)\underbrace{ww^*}_{=1})^{\frac{1}{2}} \\ &= d(v_1,v_2). \end{aligned}$$

## “明らかな”必要条件: SIN

$G \hookrightarrow \mathcal{U}(M)$, $(M, \tau)$ $\mathrm{II}_1$ 因子とする。$G$ には両側不変距離 $d$ が定まる:

$$d(u, v) := ||u - v||_2, \quad u, v \in G.$$

ここで $||x||_2 := \tau(x^*x)^{\frac{1}{2}}, \quad x \in M$。

$$\begin{aligned} d(uv_1w, uv_2w) &= \tau(w^*(v_1 - v_2)^* \underbrace{u^*u}_{=1}(v_1 - v_2)w)^{\frac{1}{2}} \\ &\overset{\text{トレース}}{=} \tau((v_1 - v_2)^*(v_1 - v_2)\underbrace{ww^*}_{=1})^{\frac{1}{2}} \\ &= d(v_1, v_2). \end{aligned}$$

**Definition (Small Invariant Neighborhood)**

位相群 $G$ が SIN 群 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $G$ 上に単位元の基本近傍系 (コンパクト)$\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ で共役不変なものが存在: $g^{-1}V_n g = V_n, \quad \forall g \in G, \forall n.$

## “明らかな”必要条件: SIN

$G \hookrightarrow \mathcal{U}(M)$, $(M, \tau)$ $\mathrm{II}_1$ 因子とする。$G$ には両側不変距離 $d$ が定まる:

$$d(u,v) := ||u-v||_2, \quad u,v \in G.$$

ここで $||x||_2 := \tau(x^*x)^{\frac{1}{2}}, \quad x \in M$。

$$\begin{aligned} d(uv_1w, uv_2w) &= \tau(w^*(v_1-v_2)^* \underbrace{u^*u}_{=1}(v_1-v_2)w)^{\frac{1}{2}} \\ &\overset{\text{トレース}}{=} \tau((v_1-v_2)^*(v_1-v_2)\underbrace{ww^*}_{=1})^{\frac{1}{2}} \\ &= d(v_1, v_2). \end{aligned}$$

### Definition (Small Invariant Neighborhood)

位相群 $G$ が SIN 群 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $G$ 上に単位元の基本近傍系 (コンパクト)$\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ で共役不変なものが存在: $g^{-1}V_n g = V_n, \quad \forall g \in G, \forall n$.

$G$ が距離付可能ならば『SIN$\Leftrightarrow$ $G$ が両側不変距離を持つ』が成立。
$\Rightarrow$ 有限型 $G$ は SIN 群でなければならない。

**もう一つの "明らかな" 必要条件**: UR

$G \hookrightarrow \mathcal{U}(M) \hookrightarrow \mathcal{U}(\ell^2)$ なので、少なくとも $G \hookrightarrow \mathcal{U}(\ell^2)$ でないといけない。

**もう一つの"明らかな"必要条件:** UR

$G \hookrightarrow \mathcal{U}(M) \hookrightarrow \mathcal{U}(\ell^2)$ なので、少なくとも $G \hookrightarrow \mathcal{U}(\ell^2)$ でないといけない。

**Definition (Unitarily Representable Group)**

$G$ がユニタリ表現可能 (UR) とは、$G \hookrightarrow \mathcal{U}(\ell^2)$ なる埋め込みが存在する事。

よって $G$ が有限ならば UR かつ SIN でなければならない。Popa はこれが十分条件であるかという問いを出した ('07)。

# 3. 両側不変距離と群上の正定値関数

もう一つの "明らかな" 必要条件: UR
$G \hookrightarrow \mathcal{U}(M) \hookrightarrow \mathcal{U}(\ell^2)$ なので、少なくとも $G \hookrightarrow \mathcal{U}(\ell^2)$ でないといけない。

**Definition (Unitarily Representable Group)**

$G$ がユニタリ表現可能 (UR) とは、$G \hookrightarrow \mathcal{U}(\ell^2)$ なる埋め込みが存在する事。

よって $G$ が有限ならば UR かつ SIN でなければならない。Popa はこれが十分条件であるかという問いを出した ('07)。

**Problem (Popa の埋め込み問題)**

*UR かつ SIN な Polish 群 $G$ は有限型か?*

$$G \overset{?}{\hookrightarrow} \mathcal{U}(M), \quad M \ \mathrm{II}_1 \text{型因子環}$$

**Theorem (Gao'03+Many others?)**

*Polish* 群 $G$ に対し以下は同値。

(1) $G$ は *UR*: $G \hookrightarrow \mathcal{U}(\ell^2)$.

(2) $G$ 上に連続正定値関数族 $\mathcal{F}$ で位相を生成するものが存在:
$g_n \to g \Leftrightarrow \varphi(g_n) \to \varphi(g), \quad \forall \varphi \in \mathcal{F}$.

(3) $G$ 上に連続正定値関数族 $\mathcal{F}$ で、任意の閉集合 $(e \notin)A$ と $e$ を $\exists \varphi \in \mathcal{F}$ が分離するものが存在: $\sup_{g \in A} |\varphi(g)| < \varphi(e)$.

# 3. 両側不変距離と群上の正定値関数

**Theorem (A-M'11)**

$G$ を Polish 群とする。このとき以下は同値。

(1) $G$ は有限型.

(2) $G$ 上に共役不変連続正定値関数族 $\mathcal{F}$ で単位元の近傍系を生成するものが存在:

$$g_n \to e \Leftrightarrow \varphi(g_n) \to \varphi(e), \quad \forall \varphi \in \mathcal{F}.$$

(3) $G$ 上に共役不変連続正定値関数族 $\mathcal{F}$ で、任意の閉集合 $(e \notin) A$ と $e$ を $\exists \varphi \in \mathcal{F}$ が分離するものが存在: $\sup_{g \in A} |\varphi(g)| < \varphi(e)$.

この特徴付を用いて非局所コンパクトな有限型 Polish 群の具体例を構成でき、かつ Popa の埋め込み問題の解がいくつかの条件下で肯定的である事を示せる。

## コンテンツ

# 4. 有限型 Polish 群の例、遺伝的性質

**正則表現によって局所コンパクト群は常に UR である。**

**Theorem (A-M('11) Popa の埋め込み (局所コンパクト群))**

**第二可算局所コンパクト *SIN* 群 $G$ は有限型である。**

**Proof.**

$e$ の共役不変な基本近傍系 $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ をとり、Haar 測度 $\mu$ に対して

$$\varphi_n(g) := \langle \lambda_g \chi_{V_n}, \chi_{V_n} \rangle \quad n \geq 1,\ g \in G$$

とすると、$\mathcal{F} = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ は連続不変正定値関数であって単位元の近傍系を生成する。 □

**正則表現によって局所コンパクト群は常に** UR **である。**

**Theorem (A-M('11) Popa の埋め込み (局所コンパクト群))**

**第二可算局所コンパクト** *SIN* **群** $G$ **は有限型である。**

**Proof.**

$e$ **の共役不変な基本近傍系** $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ **をとり、**Haar **測度** $\mu$ **に対して**

$$\varphi_n(g) := \langle \lambda_g \chi_{V_n}, \chi_{V_n} \rangle \quad n \geq 1,\ g \in G$$

**とすると、**$\mathcal{F} = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ **は連続不変正定値関数であって単位元の近傍系を生成する。** □

**従順群の場合も特徴づけできる.**

**Theorem (A-M ('11) Popa の埋め込み (従順群))**

*UR, SIN* **かつ従順な** *Polish* **群** $G$ **は有限型である。**

**非局所コンパクトな有限型 Polish 群の例。**

**Example (Hilbert Lie 群 $\mathcal{U}(\mathcal{H})_2$)**

$\mathcal{H} = \ell^2$ 上の Hilbert-Schmidt 作用素全体を $HS(\mathcal{H})$ と表す．このとき，次のように群 $U(\mathcal{H})_2$ を定義する．

$$U(\mathcal{H})_2 := \{u \in U(\mathcal{H}) \ : \ 1 - u \in HS(\mathcal{H})\}.$$

また，$U(\mathcal{H})_2$ 上に両側不変な距離 $d$ を

$$d(u, v) := \|u - v\|_{HS} = \|(1 - u) - (1 - v)\|_{HS}, \quad u, v \in U(\mathcal{H})_2,$$

と定義する．この群は局所コンパクトでないが，従順な Polish 群であるから、有限型である。
$\mathcal{U}(\mathcal{H})_2'' = \mathbb{B}(\mathcal{H})$ は無限型因子環である事に注意。

## Example ($L^2$-ユニタリ群 $\mathcal{U}(M)_2$)

$(M,\tau)$ II$_\infty$ 型因子環に対し、$L^2(M,\tau)$ を $\{x \in M;\ \tau(x^*x) < \infty\}$ の $\langle x, y\rangle := \tau(y^*x)$ による完備化とする。

$$\mathcal{U}(M)_2 := \{u \in \mathcal{U}(M);\ \ u - 1 \in L^2(M,\tau)\}$$

は距離

$$d(u,v) := ||u - v||_2, \quad u, v \in \mathcal{U}(M)_2$$

によって有限型 Polish 群となる。

## Example ($L^2$-ユニタリ群 $\mathcal{U}(M)_2$)

$(M,\tau)$ II$_\infty$ 型因子環に対し、$L^2(M,\tau)$ を $\{x \in M;\ \tau(x^*x) < \infty\}$ の $\langle x, y\rangle := \tau(y^*x)$ による完備化とする。

$$\mathcal{U}(M)_2 := \{u \in \mathcal{U}(M);\ \ u - 1 \in L^2(M,\tau)\}$$

は距離

$$d(u,v) := ||u - v||_2, \quad u, v \in \mathcal{U}(M)_2$$

によって有限型 Polish 群となる。

## Proof.

完備性: $\mathcal{U}(M)_2$ の $||\cdot||_2$-Cauchy 列 $\{1 - u_n\}$ は $L^2(M,\tau)$ で極限 $1 - U$ を持つ。$U$ の $\tau$-可測性から $U \in \mathcal{U}(M)$ が示せる。

有限性:

$$\varphi(u) := e^{-||1-u||_2^2}, \quad u \in \mathcal{U}(M)_2$$

は単位元の近傍系を生成する連続正定値不変関数である。 □

**以下は** Uffe Haagerup **氏との議論による。**

**Theorem (Communicated by Haagerup ('11))**

**可分** $II_1$ **型因子環** $M$ **が性質** *(T)* **を持つならば自己同型群** $Aut(M)$ **は** *u-topology* **によって有限型** *Polish* **群である。**

# 4. 有限型 Polish 群の例、遺伝的性質

以下は Uffe Haagerup 氏との議論による。

**Theorem (Communicated by Haagerup ('11))**

可分 $II_1$ 型因子環 $M$ が性質 $(T)$ を持つならば自己同型群 $Aut(M)$ は *u-topology* によって有限型 *Polish* 群である。

有限性はどの程度遺伝するかも調べた：

**Theorem (A-M '11)**

*Polish* 群の有限性は以下の演算下で保存される、あるいはされない。

| Operation | 有限型? |
|---|---|
| 閉部分群 $H < G$ | YES |
| 可算直積 $\prod_{n \geq 1} G_n$ | YES |
| 商群 $G/N$ | NO |
| 群拡大 $1 \to N \to G \to K \to 1$ | NO |
| 射影極限 $\varprojlim G_n$ | YES |

## コンテンツ

1. 動機 $\cdots$ 何の為に埋め込みを考えるのか?
2. 有限型 Polish 群と Popa の埋め込み問題
3. 両側不変距離と群上の正定値関数
4. 有限型 Polish 群の例、遺伝的性質
5. Popa の埋め込み問題は解けるか?

# 5. Popa の埋め込み問題は解けるか?

Popa **の埋め込み問題に反例はあるのか**? UR+SIN$\overset{?}{\Rightarrow}$Finite Type

van den Dries-Gao('09) **は** Polish SIN **群** $G_0 = \overline{\mathbb{Q} * \mathbb{Q}}^{\delta}$ **で、**Lie sum **を持たないものを構成した**:

# 5. Popa の埋め込み問題は解けるか?

Popa **の埋め込み問題に反例はあるのか**? UR+SIN$\overset{?}{\Rightarrow}$Finite Type

van den Dries-Gao('09) **は** Polish SIN **群** $G_0 = \overline{\mathbb{Q} * \mathbb{Q}}^{\delta}$ **で、**Lie sum **を持たないものを構成した**:

$\exists X(\cdot), Y(\cdot)$ 1 **係数部分群** s.t.

$$\nexists \lim_{n\to\infty} \left\{ X\left(\frac{t}{n}\right) Y\left(\frac{t}{n}\right) \right\}^n, \quad t \neq 0.$$

**しかし我々の** Lie **環の定理** ('09) **から、**$G_0$ **が有限型ならば上の極限は必ず収束する。よって** $G_0 \not\hookrightarrow \mathcal{U}(M)$.

Popa **の埋め込み問題に反例はあるのか**? UR+SIN$\overset{?}{\Rightarrow}$Finite Type

van den Dries-Gao('09) **は** Polish SIN **群** $G_0 = \overline{\mathbb{Q} * \mathbb{Q}}^{\delta}$ **で、**Lie sum **を持たないものを構成した**:

$\exists X(\cdot),\ Y(\cdot)$ 1 **係数部分群** s.t.

$$\nexists \lim_{n\to\infty}\left\{X\left(\frac{t}{n}\right)Y\left(\frac{t}{n}\right)\right\}^n, \quad t \neq 0.$$

**しかし我々の** Lie **環の定理** ('09) **から、**$G_0$ **が有限型ならば上の極限は必ず収束する。よって** $G_0 \not\hookrightarrow \mathcal{U}(M)$.

## Open Question

$G_0$ **は** *UR* **か**?

$$G_0 \overset{?}{\hookrightarrow} \mathcal{U}(\ell^2)$$

Work In Progress....

ご静聴ありがとうございました。