von Neumann 環の超積について

安藤浩志　(Institut des Hautes Études Scientifiques)*1
Uffe Haagerup　(Københavns Universitet)*2

ω を $\mathbb{N}$ 上の自由超フィルターとします。Murray-von Neumann による性質 Γ の導入以来、II_1 型因子環 M の中心列環 M_ω・超積環 M^ω は von Neumann 環論にとって重要な研究ツールでしたが、群作用の分類や Connes Embedding 問題等を通して超積の重要性は益々高まっています。一方でトレースを持たない一般の von Neumann 環に対する超積環の研究は II_1 型の場合に比してあまり見通しが良くありません。最もよく知られている構成は Ocneanu [Oc] の方法です: $M^\omega = \mathcal{M}^\omega/\mathcal{I}_\omega$。ここで $\mathcal{I}_\omega$ は M の有界列で、0 に ω-強 * 収束するもの全体、$\mathcal{M}^\omega$ はその multiplier algebra です。自然に $M \subset M^\omega$ と考えられる為に中心列環 $M' \cap M^\omega$ が定義できます。しかしこれは Connes [Con] の漸近中心化環 $M_\omega = \mathcal{M}_\omega/\mathcal{I}_\omega$ とは一般に異なります。ここで $\mathcal{M}_\omega$ は有界列 $(x_n)_n$ で、任意の $\psi \in M_*$ に対して $\|x_n\psi - \psi x_n\| \overset{n\to\omega}{\to} 0$ を満たすもの全体です。M が II_1 型ならば $M_\omega = M' \cap M^\omega$ です。M^ω は II_1 型の超積の自然な拡張と考えられますが、任意の有界列が M^ω の元を定めるわけではない為、II_1 型の場合には無い困難が生じます。実は Ocneanu の定義 ('85) より 10 年ほど前 ('75)、ロシアでは Golodets [Gol] が中心列環の別の一般化-asymptotic algebra C_M^ω-を提唱していました。彼は可分因子環 M 上の忠実正則状態 φ から $\ell^\infty(\mathbb{N}, M)$ 上の状態 $\overline{\varphi}((x_n)_n) := \lim_\omega \varphi(x_n)$ を定め、その GNS 表現 $(\ell^\infty(\mathbb{N}, M), \pi_{\mathrm{Gol}}, H_{\mathrm{Gol}}, \overline{\xi})$ を考えます。e_ω を $\overline{\pi_{\mathrm{Gol}}(\ell^\infty(\mathbb{N}, M))\overline{\xi}}$ への射影とし、補助環 $\mathscr{R}$ を

$$\mathscr{R} := e_\omega \pi_{\mathrm{Gol}}(\ell^\infty(\mathbb{N}, M))'' e_\omega \subset \mathbb{B}(e_\omega H_{\mathrm{Gol}})$$

で定めます。そして asymptotic algebra を $C_M^\omega := \mathscr{R} \cap \pi_{\mathrm{Gol}}(M)'$ と定めました。$\overline{\varphi}$ は自然に正則忠実状態 $\tilde{\varphi} \in \mathscr{R}_*$ を定めます。Golodets は $\tilde{\varphi}$ の C_M^ω への制限 $\dot{\varphi}$ は実は φ に依らず、$\Delta_{\dot{\varphi}}$ の固有値が荒木の性質 $L'_\lambda : M \cong M \overline{\otimes} R_\lambda$ を特徴付ける事、中心化環 $(C_M^\omega)_{\dot{\varphi}}$ の非可換性が McDuff 性と同値である事等を示しました。しかし C_M^ω と Ocneanu の $M' \cap M^\omega$ や Connes の M_ω はどう関係しているのか、定義から読み取るのは困難です。Golodets の論文はロシア語で書かれた為、国外でほとんど認知され無かったようです。

一方 Groh('84) [Gro] は M の前共役 M_* の Banach 空間超積 $(M_*)_\omega$ を M の Banach 空間超積の双対 $((M)_\omega)^*$ に、translation-invariant かつ等距離に埋め込める事を示し、これにより $(M_*)_\omega$ がある巨大な von Neumann 環 $\widetilde{M}$ の前共役とみなせる事を示しました。しかしこれでは $\widetilde{M}$ が何者か、全く不明です。Raynaud('02) [Ray] はより明快な $\widetilde{M}$ の構成を与え、かつこの超積 (Groh-Raynaud 超積と呼びます) が Haagerup の非可換 L^p 空間の構成と compatible である事 $L^p(M)_\omega = L^p(\widetilde{M})$ $(1 \le p < \infty)$ (完全等距離同型) 等を示しました。まず M を Hilbert 空間 H に、任意の正則状態がベクトル状態であるように表現します。次に M の Banach 空間超積 $(M)_\omega$ を $\mathbb{B}(H_\omega)$ に自然に表現します (H_ω は H の超積): $\pi_{\mathrm{Ray}} : (M)_\omega \to \mathbb{B}(H_\omega)$, $\pi_{\mathrm{Ray}}((x_n)_\omega)(\xi_n)_\omega := (x_n\xi_n)_\omega$, $(x_n)_\omega \in (M)_\omega$, $(\xi_n)_\omega \in H_\omega$. そこで $\widetilde{M} := \pi_{\mathrm{Ray}}((M)_\omega)''$ とします。従ってこの構成は表現のとり方に依存しますが、標準表現をとれば元の標準形 (M, J, H, P) の "Groh-Raynaud 超積" が再び標準形になり

JSPS 特定国派遣研究者
*1 e-mail: andonuts@ihes.fr
*2 e-mail: haagerup@math.ku.dk

ます。我々はこの Raynaud の結果を一般の列 $(M_n)_n$ の場合に証明しました。

以上 3 種類の超積が現在までにそれぞれ独立に研究されて来ました。Ocneanu が目指したように群作用の分類を考察する場合には Ocneanu 超積 M^ω が、非可換 L^p 空間論を考察する場合には Groh-Raynaud 超積 $\widetilde{M}$ が適しているように思われます。Golodets の仕事をどう位置付けすべきかも興味深い点です。

本研究では、Ocneanu と Golodets の構成は同値である事 (C_M^ω を $M' \cap M^\omega$ に移す同型写像 $\pi : \mathscr{R} \to M^\omega$ が存在する), また Ocneanu 超積は Groh-Raynaud 超積の corner である事を、Ocneanu, Groh-Raynaud の構成より少し一般化した状況で証明しました。すなわち (M_n, φ_n) を σ-有限 von Neumann 環と忠実正則状態の列とし、$\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N}, M_n) := \{(x_n)_n \in \prod_{n\in\mathbb{N}} M_n; \sup_n \|x_n\| < \infty\}$, $\mathcal{I}_\omega = \mathcal{I}_\omega(M_n, \varphi_n) := \{(x_n)_n \in \ell^\infty; \|x_n\|_{\varphi_n}^\sharp \overset{n\to\omega}{\to} 0\}$, $\mathcal{M}^\omega = \mathcal{M}^\omega(M_n, \varphi_n) = \{x \in \ell^\infty; x\mathcal{I}_\omega \subset \mathcal{I}_\omega, \mathcal{I}_\omega x \subset \mathcal{I}_\omega\}$ とし、$M^\omega = (M_n, \varphi_n)^\omega := \mathcal{M}^\omega / \mathcal{I}_\omega$ とします。M^ω には忠実正則状態 φ^ω が $\varphi^\omega((x_n)^\omega) = \lim_\omega \varphi_n(x_n)$ と定まります。M_n を標準 Hilbert 空間 $L^2(M_n, \varphi_n)$ に表現しておき、等距離写像 $w : L^2(M^\omega, \varphi^\omega) \to (L^2(M_n, \varphi_n))_\omega$ を $w(x_n)^\omega \xi_{\varphi^\omega} := (x_n \xi_{\varphi_n})_\omega$ と定めます。

Theorem 1. $w^* \left(\prod^\omega M_n\right) w = (M_n, \varphi_n)^\omega$.

この定理の証明には次の $\mathcal{M}^\omega$ や $\mathcal{I}_\omega$ の代数的特徴付けが必要になります: $\xi_\omega = (\xi_{\varphi_n})_\omega$ とし、p を $\overline{(\prod^\omega M_n)' \xi_\omega}$ への射影、$\mathcal{L}_\omega := \{(x_n)_n \in \ell^\infty; \|x_n\|_{\varphi_n} \overset{n\to\omega}{\to} 0\}, N := \prod^\omega M_n$ とします。このとき、

Proposition 2. $(x_n)_n / \mathcal{I}_\omega \mapsto (x_n)_\omega - p^\perp (x_n)_\omega p^\perp$ はベクトル空間としての同型 $\ell^\infty / \mathcal{I}_\omega \to pNp \oplus pNp^\perp \oplus p^\perp Np$ を与え、かつ

$$\rho^{-1}(pNp) = M^\omega, \quad \rho^{-1}(pNp^\perp) = \mathcal{L}_\omega / \mathcal{I}_\omega, \quad \rho^{-1}(p^\perp Np) = \mathcal{L}_\omega^* / \mathcal{I}_\omega$$

となる。さらに $\rho|_{M^\omega} : M^\omega \to pNp$ は *-同型となる。

これらを用いると、次の定理を得ます (Golodets-Raynaud 型定理)：

Theorem 3. $t \in \mathbb{R}, (x_n)^\omega \in (M_n, \varphi_n)^\omega$ に対して、次が成立する*:*

$$\sigma_t^{\varphi^\omega}((x_n)^\omega) = (\sigma_t^{\varphi_n}(x_n))^\omega.$$

特に $\mathbb{R} \ni t \mapsto (\sigma_t^{\varphi_n})^\omega \in \mathrm{Aut}((M_n, \varphi_n)^\omega)$ は連続である。

この定理から超積状態 φ^ω のモジュラー作用素の性質に関して複数の系が得られます。本講演ではそのいくつかについてお話させて頂きます。

参考文献

[Con] A. Connes, Almost periodic states and factors of type III_1, *J. Funct. Anal.* **16** (1974), 415–445.

[Gol] V. Ja. Golodets, Spectral properties of modular operators and the asymptotic ratio set (in Russian), *Math. USSR Izv.* **39** no.3 (1975), 635–656.

[Gro] U. Groh, Uniform ergodic theorems for identity preserving Schwarz maps on W*-algebras, *J. Operator Theory.* **11** (1984), 395–404.

[Oc] A. Ocneanu, Actions of discrete amenable groups on von Neumann algebras, LNM **1138** Springer (1985).

[Ray] Y. Raynaud, On ultrapowers of non commutative L_p-spaces, *J. Operator Theory*, **48** (2002), 41-68.